BINÔMIO DE NEWTON

"A verdade está na simplicidade e não na multiplicidade e confusão das coisas" Isaac Newton

- Introdução
- Teorema binomial
- Termo geral
- Triângulo de Pascal
- Propriedades do triângulo de Pascal
- Expansão multinomial

Introdução

Podemos usar o que vimos na análise combinatória para obter o desenvolvimento do binômio $(x+a)^n$ para $n\in\mathbb{N}$ e $x,a\in\mathbb{R}$.

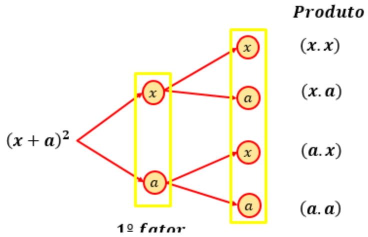
Alguns desses binômios são conhecidos por serem o desenvolvimento do que chamamos de produtos notáveis. São eles:

$$(x+a)^0 = 1$$
$$(x+a)^1 = x+a$$
$$(x+a)^2 = x^2+2ax+a^2$$
$$(x+a)^3 = x^3+3ax^2+3a^2x+a^3$$

Observe que a soma de dois termos retorna resultados positivos. Caso tenhamos a subtração dos termos, a partir do expoente 2, teremos alternância dos sinais positivo e negativo, começando com o sinal positivo.

$$(x-a)^2 = x^2-2ax+a^2$$
$$(x-a)^3 = x^3-3ax^2+3a^2x-a^3$$

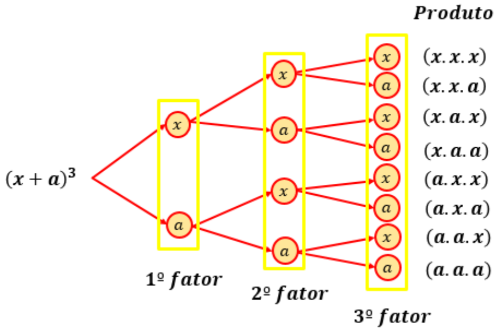
De modo geral, para todo n inteiro positivo, podemos calcular o produto usando a propriedade distributiva da multiplicação. Podemos para isso usar a ideia do diagrama de árvores.



Somando : $x.x+x.a+a.x+a.a$

$$x^2+2ax+a^2$$

Apesar de graficamente importante para que tenhamos a visão do que ocorre em produtos desse tipo, assim como na análise combinatória, esse processo fica complexo à medida que n aumenta muito.



$$x^3+3x^2a+3xa^2+a^3$$

Teorema binomial

Vamos ver o teorema a partir do desenvolvimento de binômio $(x+a)^3$.

$$(x+a)^3 = \binom{3}{0}\cdot x^3\cdot a^0+\binom{3}{1}\cdot x^{3-1}\cdot a^1+\binom{3}{2}\cdot x^{3-2}\cdot a^2+\binom{3}{3}\cdot x^0\cdot a^3$$

$$(x+a)^3 = \binom{3}{0}\cdot x^3\cdot 1+\binom{3}{1}\cdot x^2\cdot a^1+\binom{3}{2}\cdot x^1\cdot a^2+\binom{3}{3}\cdot 1\cdot a^3$$

Como:

$$\binom{3}{0} = C_{3,0} = \frac{3!}{0!\,(3-0)!} = \frac{3!}{0!\,3!} = 1$$
$$\binom{3}{1} = C_{3,1} = \frac{3!}{1!\,(3-1)!} = \frac{3!}{1!\,2!} = 3$$
$$\binom{3}{2} = C_{3,2} = \frac{3!}{2!\,(3-2)!} = \frac{3!}{2!\,1!} = 3$$
$$\binom{3}{3} = C_{3,3} = \frac{3!}{3!\,(3-3)!} = \frac{3!}{3!\,0!} = 1$$

$$\boldsymbol{(x+a)^3 = x^3+3\cdot x^2\cdot a+3\cdot x\cdot a^2+a^3}$$

Vamos ver outro exemplo desenvolvendo $(3x^2+2)^4$.

$$\binom{4}{0}\cdot(3x^2)^4\cdot 2^0+\binom{4}{1}\cdot(3x^2)^3\cdot 2^1+\binom{4}{2}\cdot(3x^2)^2\cdot 2^2+\binom{4}{3}\cdot(3x^2)^1\cdot 2^3+$$
$$+\binom{4}{4}\cdot(3x^2)^0\cdot 2^4$$

$$1\cdot 81x^8\cdot 1+4\cdot 27x^6\cdot 2+6\cdot 9x^4\cdot 4+4\cdot 3x^2\cdot 8+1\cdot 1\cdot 16$$
$$81x^8+216x^6+216x^4+96x^2+16$$

Teorema binomial

Os números binomiais: $\binom{n}{0};\binom{n}{1};\binom{n}{2};\cdots;\binom{n}{n}$
são chamados de coeficientes binomiais. No número binomial $\binom{n}{p}$, n é chamado de numerador e p, de denominador, contudo, não se trata de uma fração.

Como dito anteriormente, o teorema é válido para a subtração $(3x^2-2)^4$.

$$\binom{4}{0}\cdot(3x^2)^4\cdot(-2)^0+\binom{4}{1}\cdot(3x^2)^3\cdot(-2)^1+\binom{4}{2}\cdot(3x^2)^2\cdot(-2)^2+\binom{4}{3}\cdot(3x^2)^1\cdot(-2)^3+$$
$$+\binom{4}{4}\cdot\cdot(-2)^4$$

$$1\cdot 81x^8\cdot 1+4\cdot 27x^6\cdot(-2)+6\cdot 9x^4\cdot 4+4\cdot 3x^2\cdot(-8)+1\cdot 1\cdot 16$$
$$81x^8-216x^6+216x^4-96x^2+16$$

Percebemos a alternância entre os sinais iniciando com o sinal positivo.

Termo geral

O termo: $\binom{n}{p}.x^{n-p}.a^p$ é chamado de termo geral, pois fazendo $p=0,1,2,\dots,n$ obtemos todos os elementos do desenvolvimento.

É importante observar que para qualquer p, a soma dos expoentes de $x\ e\ a$ é sempre n. Também notamos que o expoente de x é igual a diferença entre o numerador e o denominador do coeficiente binomial correspondente.

Vamos fazer dois exemplos:

- Encontre o coeficiente em x^8, no desenvolvimento $(x^2+1)^6$. Temos: $\binom{n}{p}\cdot x^{n-p}\cdot a^p=\binom{6}{p}\cdot(x^2)^{6-p}\cdot 1^p=\binom{6}{p}\cdot x^{12-2p}$

Como queremos o coeficiente em x^8, teremos:

$$x^{12-2p}=x^8$$
$$12-2p=8$$
$$p=2$$
$$\binom{6}{p}\cdot x^{12-2p}=\binom{6}{2}\cdot x^8=15x^8$$

Logo, o coeficiente em x^8 é 15.

Vamos fazer dois exemplos:

- Encontre o termo independente em x, no desenvolvimento $\left(x-\frac{1}{x}\right)^8$.

Temos: $\binom{n}{p}\cdot x^{n-p}\cdot a^p=\binom{8}{p}\cdot x^{8-p}\cdot\left(-\frac{1}{x}\right)^p=\binom{8}{p}\cdot x^{8-p}\cdot(-1)^p\cdot x^{-p}=\binom{8}{p}\cdot(-1)^p\cdot x^{8-2p}$

Com queremos o coeficiente independente, isto é, em x^0, teremos:

$$x^{8-2p}=x^0$$
$$8-2p=0$$
$$p=4$$
$$\binom{8}{p}\cdot(-1)^p\cdot x^{8-2p}=\binom{8}{4}\cdot(-1)^4\cdot x^0=70x^0=70$$

Logo, o termo independente do desenvolvimento acima será 70.

Triangulo de Pascal

O triângulo de Pascal é uma tabela onde podemos dispor, ordenadamente, os coeficientes binomiais $\binom{n}{p}$.

$$\begin{array}{ccccccc} & & & \binom{0}{0} & & & \\ & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & \\ & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & \\ \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} \end{array}$$

Em que:

$$\binom{0}{0}=2^n=2^0$$
$$\binom{1}{0}+\binom{1}{1}=2^n=2^1$$
$$\binom{2}{0}+\binom{2}{1}+\binom{2}{2}=2^2$$
$$\binom{3}{0}+\binom{3}{1}+\binom{3}{2}+\binom{3}{3}=2^3$$

Também podemos escrever o triângulo de Pascal substituindo cada coeficiente binomial pelo seu valor.

$$\mathbf{1} \longrightarrow \boldsymbol{n=0\Rightarrow(x+a)^0}$$
$$\mathbf{1\quad 1} \longrightarrow \boldsymbol{n=1\Rightarrow(x+a)^1}$$
$$\mathbf{1\quad 2\quad 1} \longrightarrow \boldsymbol{n=2\Rightarrow(x+a)^2}$$
$$\mathbf{1\quad 3\quad 3\quad 1} \longrightarrow \boldsymbol{n=3\Rightarrow(x+a)^3}$$
$$\mathbf{1\quad 4\quad 6\quad 4\quad 1} \longrightarrow \boldsymbol{n=4\Rightarrow(x+a)^4}$$
$$\mathbf{1\quad 5\quad 10\quad 10\quad 5\quad 1} \longrightarrow \boldsymbol{n=5\Rightarrow(x+a)^5}$$

$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

Entretanto, não precisamos calcular cada coeficiente para obter seus valores. Algumas propriedades nos facilitam esse trabalho.

Propriedades do triângulo de Pascal

• 1ª. Em cada linha do triângulo, o primeiro elemento vale 1, pois, qualquer que seja a linha, o primeiro elemento é

$$\binom{n}{0} = 1, \forall\, n \in \mathbb{N}\,.$$

$$\begin{array}{c}
\boxed{1} \\
\boxed{1} \quad 1 \\
\boxed{1} \quad 2 \quad 1 \\
\boxed{1} \quad 3 \quad 3 \quad 1 \\
\boxed{1} \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1 \\
\boxed{1} \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1
\end{array}$$

• 2ª. Em cada linha do triângulo, o último elemento vale 1, pois, qualquer que seja a linha, o último elemento é

$$\binom{n}{n} = 1\,,\ \forall\, n \in \mathbb{N}\,.$$

$$\begin{array}{c}
\boxed{1} \\
1 \quad \boxed{1} \\
1 \quad 2 \quad \boxed{1} \\
1 \quad 3 \quad 3 \quad \boxed{1} \\
1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad \boxed{1} \\
1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad \boxed{1}
\end{array}$$

• 3ª (Relação Stifel). A partir de 3ª linha, cada elemento, com exceção do primeiro e do último, é a soma dos elementos da linha anterior, imediatamente acima dele.

$$\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p} \qquad n \geq 2$$

$$\begin{array}{c}
1 \\
1 \quad 1 \\
1 \quad 2 \quad 1 \\
1 \quad 3 \quad 3 \quad 1 \\
1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1 \\
1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1 \\
20
\end{array}$$

• 4ª. Numa linha, dois coeficientes binomiais equidistantes dos extremos são iguais.

$$\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$$

$$\frac{n!}{p!\,(n-p)!} = \frac{n!}{(n-p)!\,p!}$$

$$\begin{array}{c}
1 \\
1 \quad 1 \\
1 \quad 2 \quad 1 \\
1 \quad \boxed{3} \quad \boxed{3} \quad 1 \\
1 \quad \boxed{4} \quad 6 \quad \boxed{4} \quad 1 \\
1 \quad 5 \quad \boxed{10} \quad \boxed{10} \quad 5 \quad 1
\end{array}$$

Expansão multinomial

Vimos como podemos desenvolver binômios do tipo $(x+a)^n, \forall n \in \mathbb{N}$.

A partir disso, podemos estender o raciocínio para expressões do tipo $(x+y+z)^n$ e $(x+y+y+t)^n$, para $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

Tomemos como exemplo a expressão $(x+y+z)^5$.

Os tipos de produtos que obtemos são da forma $x^i . y^j \cdot z^k$ em que i, j e $k \in \mathbb{N}$ e $i + j + k = 5$.

Para cada i, j e k, o coeficiente do termo $x^i \cdot y^j \cdot z^k$ será uma permutação de cinco letras, com o elemento x se repetindo i vezes, o elemento y se repetindo j vezes e o elemento z se repetindo k vezes, ou ainda:

$$P_5^{i,j,k} = \frac{5!}{i!\,j!\,k!}$$

EXERCÍCIOS

Aplicação

Encontre o coeficiente do termo $x^2 \cdot y^2 \cdot z$ no desenvolvimento de $(x+y+z)^5$.

$i = 2$
$j = 2$
$k = 1$

$$P_5^{i,j,k} = \frac{5!}{i!\,j!\,k!} \qquad P_5^{2,2,1} = \frac{5!}{2!\,2!\,1!} = 30$$

Temos então nesse desenvolvimento o termo $30\,x^2y^2z$, onde o coeficiente é 30.

Aplicação

Qual o coeficiente de x^5 no desenvolvimento de $(1+x+x^2)^{10}$? O termo genérico é:

$$\frac{10!}{i!\,j!\,k!} \cdot (1)^i . (x)^j \cdot (x^2)^k = \frac{10!}{i!\,j!\,k!} x^{j+2k}$$

Teremos então:

$$\begin{cases} j + 2k = 5 \\ i + j + k = 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k = \dfrac{5-j}{2} \\ i = 10 - j - k \end{cases}$$

Aplicação

Qual o coeficiente de x^5 no desenvolvimento de $(1+x+x^2)^{10}$?

$$\begin{cases} k = \dfrac{5-j}{2} \\ i = 10 - j - k \end{cases}$$

Determinemos os valores para j, arbitrariamente, sendo $0 \leq j \leq 10$:

j	k	i
0	2,5	7,5
1	2	7
2	1,5	6,5
3	1	6
4	0,5	5,5
5	0	5
6	−0,5	4,5
7	−1	4
8	−1,5	3,5
9	−2	3
10	−2,5	2,5

Mas k, i e j devem ser um número natural, por isso não teremos k e i para $j=0, j=2, j=4, j=6, j=7, j=8, j=9$ e $j=10$.

Teremos então apenas três situações possíveis:

$1. i = 7; j = 1$ e $k = 2$

O coeficiente em x^5 será: $$\frac{10!}{7!\,1!\,2!} = 360$$

$2. i = 6; j = 3$ e $k = 1$

O coeficiente em x^5 será: $$\frac{10!}{6!\,3!\,1!} = 840$$

$3. i = 5; j = 5$ e $k = 0$

O coeficiente em x^5 será: $$\frac{10!}{5!\,5!\,0!} = 252$$

Somando $360x^5 + 840x^5 + 252x^5$ teremos $1452x^5$. Logo o coeficiente buscado é 1452.

Aplicação

(PUC-PR) O valor da expressão $103^4 - 4 \cdot 103^3 \cdot 3 + 6 \cdot 103^2 \cdot 3^2 - 4 \cdot 103 \cdot 3^3 + 3^4$ é uma potência de base 10 igual a:

$$\begin{array}{ccccccccccl}
 & & & & 1 & & & & & \longrightarrow & (x+a)^0 \\
 & & & 1 & & 1 & & & & \longrightarrow & (x+a)^1 \\
 & & 1 & & 2 & & 1 & & & \longrightarrow & (x+a)^2 \\
 & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \longrightarrow & (x+a)^3 \\
1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \longrightarrow & (x+a)^4
\end{array}$$

Observamos que os coeficientes do desenvolvimento pertencem à 5ª linha do triângulo de Pascal. Também notamos a alternância entre os sinais positivo e negativo. Sendo assim. Temos:

$$(103-3)^4 = 100^4 = 10^8$$

Aplicação

Calcule o valor de $\sum_{i=2}^{10}\binom{10}{i}$.

$$\binom{10}{0} + \binom{10}{1} + \underbrace{\binom{10}{2} + \binom{10}{3} + \cdots + \binom{10}{10}}_{} = 2^{10}$$

$$\binom{10}{0} + \binom{10}{1} + \sum_{i=2}^{10}\binom{10}{i} = 1024$$

$$1 + 10 + \sum_{i=2}^{10}\binom{10}{i} = 1024$$

$$\sum_{i=2}^{10}\binom{10}{i} = 1024 - 11 = 1013$$

Aplicação

(ITA-SP-Adaptada) A respeito das combinações $a_n = \binom{2n}{n}$ e $b_n = \binom{2n}{n-1}$, temos que para cada $n = 1,2,3,\cdots$, a diferença $a_n - b_n$ é igual a:

$$a_n = \frac{2n!}{n!\,(2n-n)!} = \frac{2n!}{n!\,n!} = \frac{2}{n!}$$

$$b_n = \frac{2n!}{(n-1)!\,(2n-(n-1))!} = \frac{2n!}{(n-1)!\,(n+1)!} = \frac{2n.(n-1)!}{(n-1)!\,(n+1)!} = \frac{2n}{(n+1)!}$$

$$a_n - b_n = \frac{2}{n!} - \frac{2n}{(n+1)!} = \frac{2}{n!} - \frac{2n}{(n+1).n!} = \frac{2}{n!}\left(1 - \frac{n}{n+1}\right) = \frac{2}{n!}\left(\frac{1}{n+1}\right)$$

$$a_n - b_n = a_n\left(\frac{1}{n+1}\right)$$

Aplicação

(ITA-SP-Adaptada) Considere o conjunto $S = \{(a,b) \in \mathbb{N}\ X\ \mathbb{N}: a + b = 18\}$. A soma de todos os números representados em potência de base 8 da forma $\frac{18!}{a!b!}$, $\forall\ (a,b) \in S$, é:

Os pares (a,b) podem ser $(18,0); (17,1); (16,2); \cdots; (0,18)$. Teremos então:

$$C_{18,0} + C_{18,1} + C_{18,2} + \cdots + C_{18,18}$$

$$\binom{18}{0} + \binom{18}{1} + \binom{18}{2} + \cdots + \binom{18}{18} = 2^{18} = (2^3)^6 = 8^6$$

Bibliografia

HAZZAN, Samuel. Fundamentos de matemática elementar, 5: Combinatória e probabilidade. 1ª ed. São Paulo: Editora Atual, 2004.